# DIE RESULTATE UND ANDEUTUNGEN ZUR AUFLOSUNG DER IN DEM...

Carl Spitz




FONDO PROVINCIA







# Anhang

zu dem zweiten Theile

des

# Lehrbuches der allgemeinen Arithmetik

von

Dr. Carl Spitz,
Professor am Polytechnikum zu Carlsruhe.




Die

## Resultate

und

## Andeutungen zur Auflösung

der in dem

Lehrbuche befindlichen Aufgaben

enthaltend.

Zweite, verbesserte und vermehrte Auflage.

Leipzig und Heidelberg.
C. F. Winter'sche Verlagshandlung.
1873.



# Erster Abschnitt.

## Die Combinationslehre.

---

### A. Das Permutiren.

### §. 6.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1) | 25789 | 52789 | 72589 | 82579 | 92578 |
| | 25798 | 52798 | 72598 | 82597 | 92587 |
| | 25879 | 52879 | 72859 | 82759 | 92758 |
| | 25897 | 52897 | 72895 | 82795 | 92785 |
| | 25978 | 52978 | 72958 | 82957 | 92857 |
| | 25987 | 52987 | 72985 | 82975 | 92875 |
| | 27589 | 57289 | 75289 | 85279 | 95278 |
| | 27598 | 57298 | 75298 | 85297 | 95287 |
| | 27859 | 57829 | 75829 | 85729 | 95728 |
| | 27895 | 57892 | 75892 | 85792 | 95782 |
| | 27958 | 57928 | 75928 | 85927 | 95827 |
| | 27985 | 57982 | 75982 | 85972 | 95872 |
| | 28579 | 58279 | 78259 | 87259 | 97258 |
| | 28597 | 58297 | 78295 | 87295 | 97285 |
| | 28759 | 58729 | 78529 | 87529 | 97528 |
| | 28795 | 58792 | 78592 | 87592 | 97582 |
| | 28957 | 58927 | 78925 | 87925 | 97825 |
| | 28975 | 58972 | 78952 | 87952 | 97852 |
| | 29578 | 59278 | 79258 | 89257 | 98257 |
| | 29587 | 59287 | 79285 | 89275 | 98275 |
| | 29758 | 59728 | 79528 | 89527 | 98527 |
| | 29785 | 59782 | 79582 | 89572 | 98572 |
| | 29857 | 59827 | 79825 | 89725 | 98725 |
| | 29875 | 59872 | 79852 | 89752 | 98752 |

2)

$P(uvwx) =$

| | | | |
|---|---|---|---|
| uvwx | vuwx | wuvx | xuvw |
| uvxw | vuxw | wuxv | xuwv |
| uwvx | vwux | wvux | xvuw |
| uwxv | vwxu | wvxu | xvwu |
| uxvw | vxuw | wxuv | xwuv |
| uxwv | vxwu | wxvu | xwvu |

3)

$P(a^2cd) =$

| | | |
|---|---|---|
| aacd | adac | cdaa |
| aadc | adca | daac |
| acad | caad | daca |
| acda | cada | dcaa |

4)

$P(a^3b^2c) =$

| | | | |
|---|---|---|---|
| aaabbc | ababca | baaabc | bbcaaa |
| aaabcb | abacab | baaacb | bcaaab |
| aaacbb | abacba | baabac | bcaaba |
| aababc | abbaac | baabca | bcabaa |
| aabacb | abbaca | baacab | bcbaaa |
| aabbac | abbcaa | baacba | caaabb |
| aabbca | abcaab | babaac | caabab |
| aabcab | abcaba | babaca | caabba |
| aabcba | abcbaa | babcaa | cabaab |
| aacabb | acaabb | bacaab | cababa |
| aacbab | acabab | bacaba | cabbaa |
| aacbba | acabba | bacbaa | cbaaab |
| abaabc | acbaab | bbaaac | cbaaba |
| abaacb | acbaba | bbaaca | cbabaa |
| ababac | acbbaa | bbacaa | cbbaaa |

5)

$P(3^2 4^2 5^2) =$

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 334455 | 345453 | 433455 | 445335 | 533445 | 543453 |
| 334545 | 345534 | 433545 | 445353 | 533454 | 543534 |
| 334554 | 345543 | 433554 | 445533 | 533544 | 543543 |
| 335445 | 353445 | 434355 | 453345 | 534345 | 544335 |
| 335454 | 353454 | 434535 | 453354 | 534354 | 544353 |
| 335544 | 353544 | 434553 | 453435 | 534435 | 544533 |
| 343455 | 354345 | 435345 | 453453 | 534453 | 545334 |
| 343545 | 354354 | 435354 | 453534 | 534534 | 545343 |
| 343554 | 354435 | 435435 | 453543 | 534543 | 545433 |
| 344355 | 354453 | 435453 | 454335 | 535344 | 553344 |
| 344535 | 354534 | 435534 | 454353 | 535434 | 553434 |
| 344553 | 354543 | 435543 | 454533 | 535443 | 553443 |
| 345345 | 355344 | 443355 | 455334 | 543345 | 554334 |
| 345354 | 355434 | 443535 | 455343 | 543354 | 554343 |
| 345435 | 355443 | 443553 | 455433 | 543435 | 554433 |

6)

$P(x^3y^3) =$

| | |
|---|---|
| xxxyyy | yxxxyy |
| xxyxyy | yxxyxy |
| xxyyxy | yxxyyx |
| xxyyyx | yxyxxy |
| xyxxyy | yxyxyx |
| xyxyxy | yxyyxx |
| xyxyyx | yyxxxy |
| xyyxxy | yyxxyx |
| xyyxyx | yyxyxx |
| xyyyxx | yyyxxx |

7) $P_7 = 7! = 5040$ mal.

8) 518400 mal.

Andeutung. Die Herren sowohl als die Damen für sich können 6! mal ihre Plätze ändern. Jede Complexion der letzteren mit jeder der ersteren in der bezeichneten Weise verbunden gibt $(6!)^2$ Versetzungen.

9) $P_5 = 120$ Zahlen.

10) $P_{\frac{6}{2,2}} = 180$ Zahlen.

11) $P_{\frac{15}{3,4,2,5}} = 37837800$ Versetzungen.

12) 411675264000 Permutationsformen.

13) α) 720; β) 120; γ) 24; δ) 6.

14) 576 Complexionen.

Andeutung. Betrachte 1 2 3 4 als eine Größe z, so lassen sich die Elemente z, 5, 6, 7, auf 4! Arten permutiren; da aber z selbst 4! Permutationen zuläßt, so erhält man für den fraglichen Fall $(4!)^2$ Versetzungen.

15) 2 Complexionen.

16) 120 mal.

Andeutung. Setze bf = x, so läßt die Complexion acdebf 120 Permutationen zu ꝛc.

17) 660.

Andeutung. 11 . $P_{\frac{6}{2,3}}$ ꝛc.

18) Die 54te.

Andeutung. 30 Complexionen beginnen mit a, 30 mit b; von diesen aber 12 mit ba, 6 mit bb, also beginnt die 49te mit bc und heißt bcaabc. Da nun cba die 6te Versetzung von abc ist, so ist bcacba die 54te von aabbcc.

19) bacda.

Andeutung. 6 beginnen mit aa, die 18 folgenden mit a, die 25te heißt baacd ꝛc.

20) Die 93te Form.

## B. Das Combiniren.

### §. 10.

1)

a) $\overset{4}{C}(abcdefg) =$

| | | | |
|---|---|---|---|
| abcd | bcde | cdef | defg |
| abce | bcdf | cdeg | |
| abcf | bcdg | cdfg | |
| abcg | bcef | cefg | |
| abde | bceg | | |
| abdf | bcfg | | |
| abdg | bdef | | |
| abef | bdeg | | |
| abeg | bdfg | | |
| abfg | befg | | |
| acde | | | |
| acdf | | | |
| acdg | | | |
| acef | | | |
| aceg | | | |
| acfg | | | |
| adef | | | |
| adeg | | | |
| adfg | | | |
| aefg | | | |

b) $\overset{5}{C}(1234567) =$

| | | |
|---|---|---|
| 12345 | 23456 | 34567 |
| 12346 | 23457 | |
| 12347 | 23467 | |
| 12356 | 23567 | |
| 12357 | 24567 | |
| 12367 | | |
| 12456 | | |
| 12457 | | |
| 12467 | | |
| 12567 | | |
| 13456 | | |
| 13457 | | |
| 13467 | | |
| 13567 | | |
| 14567 | | |

c) $\overset{7}{C}(123456789) =$

| | | |
|---|---|---|
| 1234567 | 2345678 | 3456789 |
| 1234568 | 2345679 | |
| 1234569 | 2345689 | |
| 1234578 | 2345789 | |
| 1234579 | 2346789 | |
| 1234589 | 2356789 | |
| 1234678 | 2456789 | |
| 1234679 | | |
| 1234689 | | |
| 1234789 | | |
| 1235678 | | |
| 1235679 | | |
| 1235689 | | |
| 1235789 | | |
| 1236789 | | |
| 1245678 | | |
| 1245679 | | |
| 1245689 | | |
| 1245789 | | |
| 1246789 | | |
| 1256789 | | |
| 1345678 | | |
| 1345679 | | |
| 1345689 | | |
| 1345789 | | |
| 1346789 | | |
| 1356789 | | |
| 1456789 | | |

2)

a) $\overset{3}{C'}(abcdf) =$

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| aaa | bbb | ccc | ddd | fff |
| aab | bbc | ccd | ddf | |
| aac | bbd | ccf | dff | |
| aad | bbf | cdd | | |
| aaf | bcc | cdf | | |
| abb | bcd | cff | | |
| abc | bcf | | | |
| abd | bdd | | | |
| abf | bdf | | | |
| acc | bff | | | |
| acd | | | | |
| acf | | | | |
| add | | | | |
| adf | | | | |
| aff | | | | |

b) $\overset{5}{C}'(abc) =$

| | | |
|---|---|---|
| aaaaa | bbbbb | ccccc |
| aaaab | bbbbc | |
| aaaac | bbbcc | |
| aaabb | bbccc | |
| aaabc | bcccc | |
| aaacc | | |
| aabbb | | |
| aabbc | | |
| aabcc | | |
| aaccc | | |
| abbbb | | |
| abbbc | | |
| abbcc | | |
| abccc | | |
| acccc | | |

c) $\overset{4}{C}'(1234) =$

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1111 | 2222 | 3333 | 4444 |
| 1112 | 2223 | 3334 | |
| 1113 | 2224 | 3344 | |
| 1114 | 2233 | 3444 | |
| 1122 | 2234 | | |
| 1123 | 2244 | | |
| 1124 | 2333 | | |
| 1133 | 2334 | | |
| 1134 | 2344 | | |
| 1144 | 2444 | | |
| 1222 | | | |
| 1223 | | | |
| 1224 | | | |
| 1233 | | | |
| 1234 | | | |
| 1244 | | | |
| 1333 | | | |
| 1334 | | | |
| 1344 | | | |
| 1444 | | | |

3)

a) $\overset{5}{C}(a^2b^3c^2d) =$

| | | | |
|---|---|---|---|
| aabbb | aabcc | abbcc | bbbcc |
| aabbc | aabcd | abbcd | bbbcd |
| aabbd | abbbc | abccd | bbccd |

b) $\overset{4}{C}(1234)^2 =$

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1122 | 1223 | 1344 | 3344 |
| 1123 | 1224 | 2233 | |
| 1124 | 1233 | 2234 | |
| 1133 | 1234 | 2244 | |
| 1134 | 1244 | 2334 | |
| 1144 | 1334 | 2344 | |

4)

| a) | b) | | c) | |
|---|---|---|---|---|
| 1116 | 11118 | 12225 | $11\overline{12}$ | 338 |
| 1125 | 11127 | 12234 | $12\overline{11}$ | 347 |
| 1134 | 11136 | 12333 | $13\overline{10}$ | 356 |
| 1144 | 11145 | 22224 | 149 | 446 |
| 1224 | 11226 | 22233 | 158 | 455. |
| 1233 | 11235 | | 167 | |
| 2223 | 11244 | | $22\overline{10}$ | |
| | 11334 | | 239 | |
| | | | 248 | |
| | | | 257 | |
| | | | 266 | |

5) Combinire 123456789 zur 5ten Klasse ohne Wiederholung. Man findet 126 Zahlen.

6) a) $\overset{2}{C}_{10} = 45$; b) $\overset{3}{C}_{10} = 120$; c) $\overset{4}{C}_{10} = 210$; $\overset{5}{C}_{10} = 252$; $\overset{6}{C}_{10} = 210$.

7) a) $\overset{3}{C'}_{8} = 120$; b) $\overset{5}{C'}_{8} = 792$; c) $\overset{7}{C'}_{8} = 3432$.

8) 90 Unionen, 4005 Amben, 117480 Ternen, 2555190 Quaternen, 43949268 Quinten.

9) Eine Person erhält 35960 Spiele und beide erhalten 37905932634570000 verschiedene Spiele.

Andeutung. Eine Person kann $\overset{4}{C}_{32}$ Spiele erhalten und unter die Spielenden kann die Karte $\overset{4}{C}_{32} . \overset{4}{C}_{28} . \overset{4}{C}_{24} . \overset{4}{C}_{20}$ mal vertheilt werden.

10) Auf 2303000 Arten.

Andeutung. $\overset{4}{C}_{50}$.

11) 40225345056 mal.

Andeutung. $\overset{25}{C}_{40} = \overset{15}{C}_{40}$.

12) Auf 3784770539550 Arten.

Andeutung. $\overset{10}{C}_{30} . \overset{12}{C}_{20} = \overset{10}{C}_{30} . \overset{8}{C}_{20}$.

13) $\overset{m'}{C}_{n'} . \overset{m-m'}{C}_{n-n'}$ Verbindungen.

Andeutung. Man erhält zunächst $\overset{m'}{C}_{n'}$ Verbindungen der n' Kugeln und jede derselben tritt so oft auf, als sich die noch übrigen (n—n') Kugeln zu je (m—m') combiniren lassen. Die gewünschte Anzahl ist daher

$$= \overset{m'}{C}_{n'} . \overset{m-m'}{C}_{n-n'}.$$

14) a) 7728; b) 70; c) 10626 Spiele.

Andeutung. a) Setze in Nr. 13: $n = 32$, $n' = 8$, $m = 4$, $m' = 2$.
b) Setze in Nr. 13: $n = 32$, $n' = 8$, $m = 4$, $m' = 4$.
c) " " " 13: $n = 32$, $n' = 8$, $m = 4$, $m' = 0$.

15) 21 Würfe.

Andeutung. $\overset{2}{C'_6}$.

16) 56 Würfe.

Andeutung. $\overset{3}{C'_6}$.

## C. Das Variiren.

### §. 14.

1)

a) $\overset{2}{V}(1234) =$

| | | | |
|---|---|---|---|
| 12 | 21 | 31 | 41 |
| 13 | 23 | 32 | 42 |
| 14 | 24 | 34 | 43 |

b) $\overset{3}{V}(1234) =$

| | | | |
|---|---|---|---|
| 123 | 213 | 312 | 412 |
| 124 | 214 | 314 | 413 |
| 132 | 231 | 321 | 421 |
| 134 | 234 | 324 | 423 |
| 142 | 241 | 341 | 431 |
| 143 | 243 | 342 | 432. |

2)

$\overset{4}{V}(abcdf) =$

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| abcd | bacd | cabd | dabc | fabc |
| abcf | bacf | cabf | dabf | fabd |
| abdc | badc | cadb | dacb | facb |
| abdf | badf | cadf | dacf | facd |
| abfc | bafc | cafb | dafb | fadb |
| abfd | bafd | cafd | dafc | fadc |
| acbd | bcad | cbad | dbac | fbac |
| acbf | bcaf | cbaf | dbaf | fbad |
| acdb | bcda | cbda | dbca | fbca |
| acdf | bcdf | cbdf | dbcf | fbcd |
| acfb | bcfa | cbfa | dbfa | fbda |
| acfd | bcfd | cbfd | dbfc | fbdc |
| adbc | bdac | cdab | dcab | fcab |
| adbf | bdaf | cdaf | dcaf | fcad |
| adcb | bdca | cdba | dcba | fcba |
| adcf | bdcf | cdbf | dcbf | fcbd |
| adfb | bdfa | cdfa | dcfa | fcda |
| adfc | bdfc | cdfb | dcfb | fcdb |
| afbc | bfac | cfab | dfab | fdab |
| afbd | bfad | cfad | dfac | fdac |
| afcb | bfca | cfba | dfba | fdba |
| afcd | bfcd | cfbd | dfbc | fdbc |
| afdb | bfda | cfda | dfca | fdca |
| afdc | bfdc | cfdb | dfcb | fdcb |

3)

a) $\overset{2}{V}'(1234) =$

| | | | |
|---|---|---|---|
| 11 | 21 | 31 | 41 |
| 12 | 22 | 32 | 42 |
| 13 | 23 | 33 | 43 |
| 14 | 24 | 34 | 44 |

b) $\overset{3}{V}'(1234) =$

| | | | |
|---|---|---|---|
| 111 | 211 | 311 | 411 |
| 112 | 212 | 312 | 412 |
| 113 | 213 | 313 | 413 |
| 114 | 214 | 314 | 414 |
| 121 | 221 | 321 | 421 |
| 122 | 222 | 322 | 422 |
| 123 | 223 | 323 | 423 |
| 124 | 224 | 324 | 424 |
| 131 | 231 | 331 | 431 |
| 132 | 232 | 332 | 432 |
| 133 | 233 | 333 | 433 |
| 134 | 234 | 334 | 434 |
| 141 | 241 | 341 | 441 |
| 142 | 242 | 342 | 442 |
| 143 | 243 | 343 | 443 |
| 144 | 244 | 344 | 444 |

4) 3024 Zahlen.

Andeutung. $\overset{4}{V}_9 = 9 . 8 . 7 . 6.$

5) Auf 2401 Arten.

Andeutung. $\overset{4}{V}'_7 = 7^4$.

6) a) 36, b) 216, c) 1296, d) 7776, e) 46656 Würfe.

7) 125 Partialprodukte.

Andeutung. $\overset{3}{V}'_5$.

8) Auf 72 Arten.

Andeutung. Jede schwarze läßt sich mit jeder der vier weißen zusammenbringen und jede dieser zweikugeligen Gruppen wieder mit jeder der 3 gelben 2c., daher die Anzahl der Gruppirungen = 6 . 4 . 3.

9) $2^n$ Theiler.

Andeutung. Denkt man sich statt der Faktoren die Reihe $1+a$; $1+b$; $1+c$, .... so erhält man hieraus offenbar $2^n$ verschiedene Produkte.

10) 32 Theiler.

Andeutung. 2310 = 2 . 3 . 5 . 7 . 11 und $2^5 = 32$.

11) $(\alpha+1)\ (\beta+1)\ (\gamma+1)\ (\delta+1) . 2 . 2 . 2$ Theiler.

Andeutung. Die Zahl enthält:

1) die $(\alpha+1)$ Theiler $1, a, a^2, a^3, \ldots a^\alpha$.
2) „ $(\beta+1)$ „ $1, b, b^2, b^3, \ldots b^\beta$.
3) „ $(\gamma+1)$ „ $1, c, c^2, c^3, \ldots c^\gamma$.
4) „ $(\delta+1)$ „ $1, d, d^2, d^3, \ldots d^\delta$.

5) die 2 Theiler 1 und e.
6) „ 2 „ 1 „ f.
7) „ 2 „ 1 „ g.
also im Ganzen
$(\alpha+1)(\beta+1)(\gamma+1)(\delta+1).2.2.2$ Theiler.
12) 192 Theiler.
Andeutung. $415800 = 2^3.3^3.5^2.7.11$ und $4.4.3.2.2 = 192$.

---

# Zweiter Abschnitt.

## Der binomische Satz.

### §. 17.

1) $a^7 + 7a^6b + 21a^5b^2 + 35a^4b^3 + 35a^3b^4 + 21a^2b^5 + 7ab^6 + b^7$.

2) $a^9 - 9a^8b + 36a^7b^2 - 84a^6b^3 + 126a^5b^4 - 126a^4b^5 + 84a^3b^6 - 36a^2b^7 + 9ab^8 - b^9$.

3) $x^6 + 6x^5 + 15x^4 + 20x^3 + 15x^2 + 6x + 1$.

4) $1 - 8x + 28x^2 - 56x^3 + 70x^4 - 56x^5 + 28x^6 - 8x^7 + x^8$.

5) $x^{12} + 12x^{11}y + 66x^{10}y^2 + 220x^9y^3 + 495x^8y^4 + 792x^7y^5 + 924x^6y^6 + 792x^5y^7 + 495x^4y^8 + 220x^3y^9 + 66x^2y^{10} + 12xy^{11} + y^{12}$.

6) $1024 - 5120x + 11520x^2 - 15360x^3 + 13440x^4 - 8064x^5 + 3360x^6 - 960x^7 + 180x^8 - 20x^9 + x^{10}$.

7) $32a^5 - 240a^4b + 720a^3b^2 - 1080a^2b^3 + 810ab^4 - 243b^5$.

8) $\frac{81x^4}{256} + \frac{9x^3y}{8} + \frac{3x^2y^2}{2} + \frac{8xy^3}{9} + \frac{16y^4}{81}$.

9) $\frac{32a^{10}b^5}{243c^{15}} - \frac{20a^{11}b^2}{27c^8} + \frac{5a^{12}}{3bc} - \frac{15a^{13}c^6}{8b^4} + \frac{135a^{14}c^{13}}{128b^7} - \frac{243a^{15}c^{20}}{1024b^{10}}$.

10) $(x^3 + 21x^2y + 35xy^2 + 7y^3)\sqrt{x} + (7x^3 + 35x^2y + 21xy^2 + y^3)\sqrt{y}$.

11) $(a^3 + 21a^2b + 35ab^2 + 7b^3)\sqrt{a} - (7a^3 + 35a^2b + 21ab^2 + b^3)\sqrt{b}$.

12) $49 - 20\sqrt{6}$.

13) a) $314928\,a^{14}b^6$; b) $489888\,a^{10}b^{12}$; c) $-41472\,a^4b^{21}$.

14) $\overset{6}{C}_{12} a^6 b^6 = \binom{12}{6} a^6 b^6 = 924\ a^6 b^6$.

15) $\overset{8}{C}_{17} x^9 y^8$ und $\overset{9}{C}_{17} x^8 y^9$ oder $24310\ x^9 y^8$ und $24310\ x^8 y^9$.

16) $\overset{14}{C}_{24} a^{10} b^{14} = \overset{10}{C}_{24} a^{10} b^{14} = 1961256\ a^{10} b^{14}$.

17) $\frac{513512}{625\ a^{10} b^{38} c^{27}}$.

18) $126\ a^5 b^2$.

## §. 21.

1) $a^3 + 3a^2b + 3a^2c + 3ab^2 + 6abc + 3ac^2 + b^3 + 3b^2c$
$+ 3bc^2 + c^3$.

2) $a^4 + 4a^3b + 4a^3c + 6a^2b^2 + 12a^2bc + 6a^2c^2 + 4ab^3 +$
$12ab^2c + 12abc^2 + 4ac^3 + b^4 + 4b^3c + 6b^2c^2 + 4bc^3 + c^4$.

3) $a^5 + 5a^4b + 5a^4c + 10a^3b^2 + 20a^3bc + 10a^3c^2 +$
$10a^2b^3 + 30a^2b^2c + 3a^2bc^2 + 10a^2c^3 + 5ab^4 + 20ab^3c$
$+ 30ab^2c^2 + 20abc^3 + 5ac^4 + b^5 + 5b^4c + 10b^3c^2 +$
$10b^2c^3 + 4bc^4 + c^5$.

4) $a^6 + 6a^5b + 6a^5c + 15a^4b^2 + 30a^4bc + 15a^4c^2 + 20a^3b^3$
$+ 60a^3b^2c + 60a^3bc^2 + 20a^3c^3 + 15a^2b^4 + 60a^2b^3c +$
$90a^2b^2c^2 + 60a^2bc^3 + 15a^2c^4 + 6ab^5 + 30ab^4c +$
$60ab^3c^2 + 60ab^2c^3 + 30abc^4 + 6ac^5 + b^6 + 6b^5c + 15b^4c^2$
$+ 20b^3c^3 + 15b^2c^4 + 6bc^5 + c^6$.

5) $a^2 + 2ab + 2ac + 2ad + b^2 + 2bc + 2bd + c^2 + 2cd + d^2$.

6) $a^3 + 3a^2b + 3a^2c + 3a^2d + 3ab^2 + 6abc + 6abd + 3ac^2$
$+ 6acd + 3ad^2 + b^3 + 3b^2c + 3b^2d + 3bc^2 + 6bcd +$
$3bd^2 + c^3 + 3c^2d + 3cd^2 + d^3$.

7) $a^5 + 5a^4b + 5a^4c + 5a^4d + 10a^3b^2 + 20a^3bc + 20a^3bd$
$+ 10a^3c^2 + 20a^3cd + 10a^3d^2 + 10a^2b^3 + 10a^2b^2c +$
$30a^2b^2d + 30a^2bc^2 + 60a^2bcd + 30a^2bd^2 + 10a^2c^3 +$
$30a^2c^2d + 30a^2cd^2 + 10a^2d^3 + 5ab^4 + 20ab^3c + 20ab^3d +$
$30ab^2c^2 + 60ab^2cd + 30ab^2d^2 + 20abc^3 + 60abc^2d +$
$60abcd^2 + 20abd^3 + 5ac^4 + 20ac^3d + 30ac^2d^2 +$
$20acd^3 + 5ad^4 + b^5 + 5b^4c + 5b^4d + 10b^3c^2 + 20b^3cd +$
$10b^3d^2 + 10b^2c^3 + 30b^2c^2d + 30b^2cd^2 + 10b^2d^3 + 5bc^4 +$
$20bc^3d + 30bc^2d^2 + 20bcd^3 + 5bd^4 + c^5 + 5c^4d +$
$10c^3d^2 + 10c^2d^3 + 5cd^4 + d^5$.

8) $8a^3 - 36a^2b + 12a^2c + 54ab^2 - 36abc + 6ac^2 + 27b^3 + 27b^2c - 9bc^2 + c^3$.

9) $256x^8 + 768x^6y^3 - 512x^6z^4 + 864x^4y^6 - 1152x^4y^3z^4 + 384x^4z^8 + 432x^2y^9 - 864x^2y^6z^4 + 576x^2y^3z^8 - 128x^2z^{12} + 81y^{12} - 216y^9z^4 + 216y^6z^8 - 96y^3z^{12} + 16z^{16}$.

---

# Dritter Abschnitt.

## Die Wahrscheinlichkeitsrechnung.

### §. 35.

1) $W = \frac{1}{2}$.

2) $W = \frac{1}{50}$.

3) $W = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$.

Andeutung $g = 36$, $m = 6$.

4) $W = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$.

5) $W = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$.

6) $W = \frac{4}{32} = \frac{1}{8}$.

7) $W = \frac{16}{32} = \frac{1}{2}$.

8) a) $W = \frac{6}{16} = \frac{3}{8}$, b) $W = \frac{10}{16} = \frac{5}{8}$.

9) $W = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$.

10) a) $W = \frac{7}{124}$; b) $W = \frac{1}{1240}$; c) $W = \frac{7}{3596}$.

Andeutung a) $W = \frac{\overset{2}{C}_8}{\overset{2}{C}_{32}}$; b) $W = \frac{\overset{3}{C}_4}{\overset{3}{C}_{32}}$; c) $W = \frac{\overset{4}{C}_8}{\overset{4}{C}_{32}}$

11) a) $W = \frac{1}{899}$; b) $W = \frac{1}{155}$; c) $W = \frac{64}{155}$.

Andeutung. a) $W = \frac{4 \, . \, \overset{5}{C}_8}{\overset{5}{C}_{32}}$, b) $W = \frac{8 \, . \, \overset{3}{C}_4}{\overset{3}{C}_{32}}$, c) $W = \frac{8^3 . \, \overset{3}{C}_4}{\overset{3}{C}_{32}}$.

12) a) $W = \frac{5}{13}$; b) $W = \frac{5}{11}$.

Andeutung. a) $W = \frac{\frac{5}{36}}{\frac{8}{36} + \frac{5}{36}}$, b) $W = \frac{\frac{10}{36}}{\frac{10}{36} + \frac{5}{36} + \frac{7}{36}}$ (§. 25.)

13) $W = \frac{30}{107}$.

Andeutung. $W = \frac{30}{30+77}$ §. 24. (Beispiel 2.)

14) $W = \frac{3}{4}$.

Andeutung. $W = \frac{\frac{12}{32}}{\frac{12}{32} + \frac{4}{32}}$.

15) $W = \frac{38}{73}$.

Andeutung. D kann die 8 Karten auf $\overset{8}{C}_{31}$ verschiedene Arten erhalten, indem eigentlich nur 31 Karten mit 7 Trümpfen auszutheilen sind. Denkt man sich die 7 Trümpfe hinweg, so können die noch übrigen 24 Karten auf $\overset{7}{C}_{24}$ Arten zu je 7 verbunden werden, so daß für D $7 \, . \, \overset{7}{C}_{24}$ Fälle günstig sind. Für das Eintreffen des Ereignisses ist somit die Wahrscheinlichkeit $= \frac{7 \, . \, \overset{7}{C}_{24}}{\overset{8}{C}_{31}}$.

32 Karten lassen sich ferner auf $\overset{8}{C}_{32}$ Arten unter 4 Personen vertheilen; jede Gruppe von 8 Karten von gleichen Farben läßt $\overset{4}{C}_8$ Verbindungen zu je 4 zu, und die noch übrigen 24 Karten geben $\overset{4}{C}_{24}$ Verbindungen zu den 4 Karten von anderer Farbe, somit erhält man $\overset{4}{C}_8 . \overset{4}{C}_{24}$ Verbindungen von 4 Karten einerlei Farbe mit 4 Karten der drei anderen Farben. Dies gilt für jede Farbe. Man hat daher im Ganzen $4 \, . \, \overset{4}{C}_8 . \overset{4}{C}_{24}$ günstige Fälle und es ist demnach die Wahrscheinlichkeit für das Eintreffen des zweiten Ereignisses $= \frac{4 \, . \, \overset{4}{C}_8 . \overset{4}{C}_{24}}{\overset{8}{C}_{32}}$; folglich die verlangte Wahrscheinlichkeit

$$W = \frac{\frac{7 \, . \, \overset{7}{C}_{24}}{\overset{8}{C}_{31}}}{\frac{7 \, . \, \overset{7}{C}_{24}}{\overset{8}{C}_{31}} + \frac{4 \, . \, \overset{4}{C}_8 . \overset{4}{C}_{24}}{\overset{8}{C}_{32}}} = \frac{1}{1 + \frac{4 \overset{4}{C}_8 . \overset{4}{C}_{24} . \overset{8}{C}_{31}}{7 \, \overset{8}{C}_{32} . \overset{7}{C}_{24}}}$$

16) $W = \frac{44}{1431}$.

Andeutung. $W = \frac{22}{54} \cdot \frac{4}{53}$, da im Tarokspiele 22 Tarokkarten und 4 Könige enthalten sind.

17) $W = \frac{8855}{210366}$.

Andeutung. Günstig sind $\overset{4}{C}_8 . \overset{3}{C}_{24}$, möglich dagegen $\overset{7}{C}_{32}$ Fälle, daher $W = \frac{\overset{4}{C}_8 . \overset{3}{C}_{24}}{\overset{7}{C}_{32}}$.

18) a) $W = \frac{44}{267}$, b) $W = \frac{5}{267}$, c) $W = \frac{5}{5162}$,

d) $W = \frac{2}{110983}$.

Andeutung. a) Wahrscheinlichkeit des Gewinnens einer Ambe, wenn nur eine solche besetzt ist, $= \frac{\overset{2}{C}_5}{\overset{2}{C}_{90}}$; da aber alle in 12 Numern enthaltenen Amben besetzt sind, so wird $W = \frac{\overset{2}{C}_{12} . \overset{2}{C}_5}{\overset{2}{C}_{90}}$. Ebenso erhält man für b) $W = \frac{\overset{3}{C}_{12} . \overset{3}{C}_5}{\overset{3}{C}_{90}}$, für c) $W = \frac{\overset{4}{C}_{12} . \overset{4}{C}_5}{\overset{4}{C}_{90}}$, für d) $W = \frac{\overset{5}{C}_{12} . \overset{5}{C}_5}{\overset{5}{C}_{90}}$.

19) a) $W = \frac{4584475}{10987317}$; b) $W = \frac{2600150}{10987317}$.

Andeutung. 70 Numern sind nicht besetzt, also wird für a) $W = \frac{20 . \overset{4}{C}_{70}}{\overset{5}{C}_{90}}$, für b) $W = \frac{\overset{2}{C}_{20} . \overset{3}{C}_{70}}{\overset{5}{C}_{90}}$.

20) $W = \frac{135751}{24772995}$.

Andeutung. Es sind $\overset{5}{C}_8 . \overset{6}{C}_{46}$ Fälle günstig, dagegen $\overset{11}{C}_{54}$ Fälle möglich.

21) $W = \frac{1}{7776}$.

Andeutung. $W = \frac{1}{6} . \frac{1}{6} . \frac{1}{6} . \frac{1}{6} . \frac{1}{6} . = \frac{1}{6^5}$.

22) $W = \frac{1}{18}$.

Andeutung $W = \frac{2}{6} . \frac{1}{6}$.

23) $W = \frac{1}{54}$.

Andeutung. $W = \frac{4}{6} \cdot \frac{3}{6} \cdot \frac{2}{6} \cdot \frac{1}{6}$.

24) $W = \frac{1}{36}$.

Andeutung. $W = \frac{3}{6} \cdot \frac{2}{6} \cdot \frac{1}{6}$.

25) $W = \frac{25}{216}$.

Andeutung. Wirft C 11, so beginnt das Spiel von Neuem und die Wahrscheinlichkeit nun zu gewinnen ist $= \frac{1}{3}$, die Anzahl der Würfe, welche mehr als 14 geben können, wird erhalten, wenn man die Variation aus 1 bis 6 zu 3 zu den Quersummen 15, 16, 17 und 18 addirt. Man findet dafür $10 + 6 + 3 + 1 = 20$ Würfe. Die Wahrscheinlichkeit mehr als 14 zu werfen ist daher $= \frac{20}{6^3} = \frac{5}{54}$ und die gerade 14 zu werfen $= \frac{15}{216}$. Demnach ist die Wahrscheinlichkeit, daß ein neues Spiel beginnt und C darin gewinnt $= \frac{1}{3} \cdot \frac{15}{216} = \frac{5}{216}$ und die Wahrscheinlichkeit, daß C überhaupt gewinnt $= \frac{5}{54} + \frac{5}{216} = \frac{25}{216}$.

26) a) $W = \frac{5}{9}$, b) $W = \frac{25}{54}$, c) $W = \frac{25}{108}$.

Andeutung. a) 4 Würfel geben auf $\overset{2}{C}_4$ Arten einen Pasch, daher a) $W = \frac{6.5.4.\overset{2}{C}_4}{6^4}$; b) $W = \frac{6.5.4.3.\overset{2}{C}_5}{6^5}$; c) $W = \frac{6.5.4.3.2.\overset{2}{C}_6}{6^6}$

27) $W = \frac{1}{24}$.

Andeutung. Die Wahrscheinlichkeit in die Urne, welche die Kugeln der betreffenden Farbe enthält, zu greifen ist $\frac{1}{4}$ und die für den Zug der betreffenden Numer $= \frac{1}{6}$, also die zusammengesetzte Wahrscheinlichkeit $= \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{6}$.

28) $W = \frac{163}{364}$.

Andeutung. Wahrscheinlichkeit eines Griffes in die Urne A $= \frac{1}{2}$ und daraus eine schwarze Kugel zu ziehen $= \frac{7}{13}$; Wahrscheinlichkeit für das Ereigniß beider Fälle $= \frac{1}{2} \cdot \frac{7}{13}$. — Wahrscheinlichkeit einen Griff in die Urne B zu thun und eine schwarze Kugel darin zu ergreifen $= \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{14}$. Somit ist die verlangte Wahrscheinlichkeit $= \frac{1}{2} \cdot \frac{7}{13} + \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{14}$.

29) $W = \frac{165}{442}$.

Andeutung. Möglich sind $\overset{7}{C}_{18}$; 12 schwarze Kugeln können auf $\overset{5}{C}_{12}$ Arten zu je 5 gezogen werden, die noch übrigen 2 sollen weiß sein und können auf $\overset{2}{C}_{6}$ Arten mit den gezogenen 5 schwarzen verbunden vorkommen. Der günstigen Fälle sind es somit $\overset{5}{C}_{12} \cdot \overset{2}{C}_{6}$ und die verlangte Wahrscheinlichkeit ist daher $\frac{\overset{5}{C}_{12} \cdot \overset{2}{C}_{6}}{\overset{7}{C}_{18}}$

30) $W = \frac{15}{64}$.

Andeutung. Nach §. 26. wird $W = 1 - \left(1 - \frac{4}{32}\right)\left(1 - \frac{4}{32}\right)$

31) $W = \frac{10483}{19683}$.

Andeutung. Wahrscheinlichkeit einen König zu ziehen $= \frac{4}{54}$ Wahrscheinlichkeit ein Coeur zu ziehen $= \frac{22}{54}$, daher

$$W = 1 - \left(1 - \frac{4}{54}\right)\left(1 - \frac{8}{54}\right)\left(1 - \frac{22}{54}\right).$$

32) $W = \frac{1}{1296}$.

Andeutung. Nach §. 25. wird $W = \frac{1}{6^4}$.

33) $W = \frac{7}{27}$.

Andeutung. Die Wahrscheinlichkeit 7 zu werfen ist $\frac{6}{36} = \frac{1}{6}$ und die 5 zu werfen $\frac{4}{36} = \frac{1}{9}$, also $W = 1 - \left(1 - \frac{1}{6}\right)\left(1 - \frac{1}{9}\right)$ɔc.

34) $W = \frac{625}{3888}$.

Andeutung. Nach §. 27 (1) ist

$$W = \binom{5}{3}\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right)^3.$$

35) $W = \frac{5}{16}$.

Andeutung. Nach §. 27 (1) wird

$$W = \binom{9}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^3.$$

36) $W = \frac{23}{648}$.

Andeutung. Nach §. 27. (2) ist

$$W = \left(\frac{1}{6}\right)^5 + 5\left(\frac{1}{6}\right)^4\left(\frac{5}{6}\right) + 10\left(\frac{1}{6}\right)^3\left(\frac{5}{6}\right)^2.$$

38) $W = \frac{1792}{6561}$.

Andeutung. $W = \binom{8}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^6\left(\frac{1}{3}\right)^2$.

38) $W = \frac{5}{1296}$.

Andeutung. Nach §. 27. (3) ist

$$W = 5\left(\frac{1}{6}\right)^4\left(\frac{1}{6}\right) + 10\left(\frac{1}{6}\right)^3\left(\frac{1}{6}\right)^2 + 15\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{1}{6}\right)^3.$$

39) $1\frac{2}{3}$ Mark.

Andeutung. Wahrscheinlichkeit für $A = \frac{3}{8}$, für $B = \frac{5}{8}$; also muß sich nach §. 28 verhalten:

$$1 : B = 3 : 5 \text{ ꝛc.}$$

40) Wie 2:3.

Andeutung. Wahrscheinlichkeit für $A = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$; für $B = \frac{3}{18} = \frac{1}{6}$; also

$$E_A : E_B = \frac{1}{9} : \frac{1}{6}.$$

41) $\frac{1}{3}$ Mark.

Andeutung. Wahrscheinlichkeit ein Aß zu ziehen $= \frac{4}{32} = \frac{1}{8}$, Wahrscheinlichkeit darnach einen König zu ziehen $= \frac{4}{31}$, folglich $W = \frac{1}{8} \cdot \frac{4}{31} = \frac{1}{62}$, somit

$$E = \frac{1}{62} \cdot 20\tfrac{1}{3} \text{ Mk.}$$

42) $21\frac{3}{5}$ Mark.

Andeutung. Es sind 6 Ternen möglich, der vierte kann auf 5 Arten fallen, also gibt es für jene Würfel in Verbindung mit diesem vierten im Ganzen $6 \cdot 5 = 30$ Ternen. 4 Würfel können aber auf $\overset{3}{C}_4$ Arten zu 3 und 3 zusammen genommen werden, somit ist

$$W = \frac{6 \cdot 5 \, \overset{3}{C}_4}{6^4} = \frac{5}{54}$$

und aus der Gleichung

$$\frac{5}{54} G = 2$$

folgt nun G.

43) Das Spiel ist unbillig, da B im Vortheil ist.

Andeutung. Der Hoffnungswerth des A beträgt

$$\frac{1}{6}.1 + \frac{1}{6}.2 + \frac{1}{6}.3 + \frac{1}{6}.4 + \frac{1}{6}.5 + \frac{1}{6}.6 = 3\tfrac{1}{2} \text{ Mk.}$$

also ist sein Einsatz um $1\frac{1}{2}$ Mk. größer und B im Vortheil.

44) $W = \frac{210}{439}$.

45) $W = \frac{94}{395}$.

46) $W = \frac{1}{2}$.

Anmerkung. Es ist demnach 61 — 36 = 25 Jahre die wahrscheinliche Lebensdauer einer 36jährigen Person.

47) 18 Jahre.

Andeutung. Vergl. §. 29, 3. $P_{47} = 324$, $P_{65} = 162 = \frac{324}{2}$.

48) a) $W = 0{,}5183$; b) $W = 0{,}4817$; c) $W = 0{,}1644$; d) $W = 0{,}2414$; e) $W = 0{,}0767$; f) $W = 0{,}9233$.

Andeutung. Nach §. 31 ist:

a) $W = \frac{255}{374}.\frac{324}{427}$, d) $\left(1 - \frac{255}{374}\right)\frac{324}{427}$,

b) $W = 1 - \frac{255}{374}.\frac{324}{427}$, e) $\left(1 - \frac{255}{374}\right)\left(1 - \frac{324}{427}\right)$,

c) $W = \frac{255}{374}\left(1 - \frac{324}{427}\right)$, f) $1 - \left(1 - \frac{255}{374}\right)\left(1 - \frac{324}{427}\right)$.

49) 14 Jahre 1,2 Monate.

Andeutung. $P_{42} = 360$, $P_{37} = 395$, also

$$\tfrac{1}{2}P_{42}\,P_{37} = 71100$$

$$P_{42+14}\,.\,P_{37+14} = 71586;\; P_{42+15}\,.\,P_{37+15} = 66834$$

$$71586 - 66834 : 71586 - 71100 = 12 : x.$$

50) 2,6 Jahre.

Andeutung. Vergl. das Beispiel zu §. 33.

51) $W = \frac{45504}{168665} = 0{,}269$.

Andeutung. Die Wahrscheinlichkeit noch 25 Jahre zu leben ist für die erste Person $= \frac{237}{427}$, für die zweite $\frac{192}{395}$, also die zusammengesetzte Wahrscheinlichkeit

$$= \frac{237}{427}.\frac{192}{395}.$$

52) $W = \frac{4275}{12901} = 0{,}331$.

Andeutung. $W = \frac{439}{532}.\frac{228}{388}.\frac{300}{439}$.

53) $W = 0{,}19767$.

Andeutung. $W = \frac{255}{395}.\frac{308}{433}.\frac{451}{532}.\frac{461}{547}.\frac{481}{593}.\frac{491}{661}$.

54) $W = \frac{47}{73}$.

Andeutung. Die Hypothesen sind:

1) 4 schwarze, 1 weiße,
2) 3 „ 2 „
3) 2 „ 3 „
4) 1 „ 4 „

also wird entsprechend (vergl. §. 34)

$$1)\ W_1 = \frac{4}{5},\quad W_2 = \frac{1}{5},$$
$$2)\ W_1 = \frac{3}{5},\quad W_2 = \frac{2}{5},$$
$$3)\ W_1 = \frac{2}{5},\quad W_2 = \frac{3}{5},$$
$$4)\ W_1 = \frac{1}{5},\quad W_2 = \frac{4}{5}.$$

Daher nach der Formel

$$W = \binom{4}{1} w_1^3 w_2$$

$$1)\ W_1' = 4\left(\frac{4}{5}\right)^3\left(\frac{1}{5}\right) = \frac{256}{625},$$
$$2)\ W_2' = 4\left(\frac{3}{5}\right)^3\left(\frac{2}{5}\right) = \frac{216}{625},$$
$$3)\ W_3' = 4\left(\frac{2}{5}\right)^3\left(\frac{3}{5}\right) = \frac{96}{625},$$
$$4)\ W_4' = 4\left(\frac{1}{5}\right)^3\left(\frac{4}{5}\right) = \frac{16}{625}.$$

Die erste Hypothese ist also die wahrscheinlichste.

Die relativen Wahrscheinlichkeiten der Hypothesen sind der Reihe nach

$$1)\ W_1'' = \frac{256}{256+216+96+16} = \frac{256}{584},$$
$$2)\ W_2'' = \frac{216}{584},\quad W_3'' = \frac{96}{584},\quad W_4'' = \frac{16}{584}.$$

Befinden sich in der Urne 4 schwarze und 1 weiße Kugel, so ist die Wahrscheinlichkeit, daß beim fünften Zuge eine schwarze gezogen werde, $= \frac{4}{5}$. Die Wahrscheinlichkeit der Hypothese selbst ist aber $\frac{256}{584}$, also die zusammengesetzte Wahrscheinlichkeit

$$1)\ W_1''' = \frac{4}{5}\cdot\frac{256}{584} = \frac{1024}{2920}.$$

Analog erhält man für die drei anderen Hypothesen:

$$2)\ W_2''' = \frac{3}{5}\cdot\frac{216}{584} = \frac{648}{2920},$$
$$3)\ W_3''' = \frac{2}{5}\cdot\frac{96}{584} = \frac{192}{2920},$$
$$4)\ W_4''' = \frac{1}{5}\cdot\frac{16}{584} = \frac{16}{2920},$$

folglich wird die verlangte Wahrscheinlichkeit

$$W = W_1''' + W_2''' + W_3''' + W_4''' = \frac{1880}{2920} = \frac{47}{73}.$$

---

# Vierter Abschnitt.

## Von den Rechnungsarten, welche sich auf die menschliche Sterblichkeit gründen.

### §. 44.

1) Prämie = 1219,8 Mk.

Andeutung. Nach §. 37.

2) Prämie = 783,74 Mk.

Andeutung. Nach §. 37.

3) Prämie = 678,79 Mk.

4) Zusatzprämie = 17,272 Mk.

Andeutung. Nach §. 38.

5) Zusatzprämie = 735,71 Mk.

6) Zusatzprämie = 763,5 Mk.

Andeutung. Nach §. 39.

7) Jahresprämie = 419,9 Mk.

Andeutung. Nach §. 40.

8) Zusatzprämie = 0,97 Mk.

Andeutung. Die Anstalt hat zu vergüten:

$$[(P_0-P_1) + 2\,(P_1-P_2) + 3\,(P_2-P_3) + \ldots + 18\,(P_{17}-P_{18})]\ 10 \text{ Mk.}$$
$$= (250 + 2 \,.\, 89 + 3 \,.\, 43 + 4 \,.\, 25 + 5 \,.\, 14 + 6 \,.\, 12 + 7 \,.\, 11 + 8 \,.\, 9 + 9 \,.\, 8 + 10 \,.\, 7 + 11 \,.\, 5 + 12 \,.\, 4 + 13 \,.\, 4 + 14 \,.\, 4 + 15 \,.\, 4 + 16 \,.\, 4 + 17 \,.\, 4 + 18 \,.\, 4)\ 10 \text{ Mk.}$$
$$= 15650 \text{ Mk.}$$

und da 1 Mk. Jahresprämie eines jeden Kindes der Bank

$$1{,}04^{18}\,(\Sigma\mathfrak{P}_0 - \Sigma\mathfrak{P}_{18})$$
$$= 1000 \,.\, 1{,}04^{18} + 750 \,.\, 104^{17} + \ldots + 507 \,.\, 1{,}04^{2} + 503 \,.\, 1{,}04$$
$$= 16074{,}49 \text{ Mk.}$$

einbringt, so findet man für die Zusatzprämie

$$z'_m = \frac{15650}{16074{,}49} \text{ Mk.}$$

9) Zusatzprämie = 0,58 Mk.

Andeutung. Die Anstalt hat zurückzugeben:

$$(5 + 2 \,.\, 4 + 3 \,.\, 4 + 4 \,.\, 4 + 5 \,.\, 4 + 6 \,.\, 4 + 7 \,.\, 4 + 8\ \ 4)\ 20$$
$$= 2900 \text{ Mk.}$$

und da 1 Mk. Jahresprämie der Bank

$$1{,}04^{18}\,(\Sigma\mathfrak{P}_{10} - \Sigma\mathfrak{P}_{18})$$
$$= 532 \,.\, 1{,}04^{8} + 527 \,.\, 1{,}04^{7} + \ldots + 507 \,.\, 1{,}04^{2} + 503 \,.\, 1{,}04$$
$$= 4963{,}53 \text{ Mk.}$$

einbringt, so folgt:

$$z'_m = \frac{2900}{4963{,}53} \text{ Mk.}$$

10) Zusatzprämie = 1,5 Mk.

Andeutung. Da der künftige Werth der Vergütungen
$= (250 . 1,04^{17} + 2 . 89 . 1,04^{16} + 3 . 43 . 1,04^{15} + \ldots$
$+ 16 . 4 . 1,04^{2} + 17 . 4 . 1,04 + 18 . 4) 10$
$= 2422,394 . 10 = 24223,94$ Mk.
ist, so wird

$$z'_m = \frac{24223,94}{16074,49} = 1,5 \text{ Mk.}$$

11) Zusatzprämie = 1,07 Mk.
Andeutung. Aus der Proportion
$16074,49 : 1 = (10 + Z'_m) 1565 : Z'_m$.
Vergl. §. 43, Beisp. 1.

12) Zusatzprämie = 1,77 Mk.
Andeutung. Vergl. die Andeutung zu Aufgabe 10. Man erhält die Proportion
$16074,49 : 1 = (10 + Z'_m) 2422,394 : Z'_m$.

## §. 66.

1) Baarwerth = 30169,3 Mk.
Andeutung. Nach §. 48.

2) Baarwerth = 10796,1 Mk.
Andeutung. Nach §. 48.

3) Rente = 761,71 Mk.
Andeutung. Nach §. 48.

4) Baarwerth = 1683,56 Mk.
Andeutung. Nach §. 49.

5) Baarwerth = 17208,16 Mk.
Andeutung. Nach §. 49.

6) Rente = 1208,026 Mk.
Andeutung. Nach §. 49.

7) Rente = 492,88 Mk.
Andeutung. Nach §. 49.

8) Baarwerth = 15340,9 Mk.
Andeutung. Nach §. 50.

9) Baarwerth = 10605,1 Mk.
Andeutung. Nach §. 50.

10) Einlage = 16601,8 Mk.
Andeutung. Nach §. 50.

11) Rente = 188,481 Mk.
Andeutung. Nach §. 50.

12) Baarwerth = 909,78 Mk.
Andeutung. Nach §. 51.

13) Rente = 3638,17 Mk.
Andeutung. Nach §. 51.

14) Baarwerth = 3698,5 Mk.
Andeutung. Nach §. 52.

15) Baarwerth = 2088 Mk.
Andeutung. Nach §. 52.

16) Baarwerth = 24184,55 Mk.
Andeutung. Nach §. 52, Zusatz 4.

17) Baarwerth = 2730,63 Mk.
Andeutung. Nach §. 53.

18) Baarwerth = 12468,2 Mk.
Andeutung. Nach §. 56.

19) Baarwerth = 2796,6 Mk.
Andeutung. Nach §. 57.

20) Baarwerth = 4623,76 Mk.
Andeutung. Nach §. 58.

21) Jährliche Einlage = 6102,855 Mk.
Andeutung. Nach §. 59.

22) Baarwerth = 2940,36 Mk.
Andeutung. Nach §. 60.

23) Jährliche Einlage = 8279,3 Mk.
Andeutung. Nach §. 61.

24) Baarwerth = 368,12 Mk.
Andeutung. Nach §. 62.

25) Baarwerth $= r\left[\varrho_m + \frac{d}{\mathfrak{P}_m}(\mathfrak{P}_{m+2} + 2\mathfrak{P}_{m+3} + 3\mathfrak{P}_{m+4} + \ldots)\right]$

Andeutung. Die Bank hat am Ende des 1ten, 2ten, .... Jahres auszuzahlen: $r.P_{m+1}$, $(r+d)P_{m+2}$, .... also ist der baare Werth der Ausgaben

$$= \frac{r.P_{m+1}}{1,0p} + \frac{(r+d)P_{m+2}}{1,0p^2} + \frac{(r+2d)P_{m+3}}{1,0p^3} + \ldots$$

$$= r.1,0p^m [(\mathfrak{P}_{m+1} + \mathfrak{P}_{m+2} + \mathfrak{P}_{m+3} + \ldots) + d(\mathfrak{P}_{m+2} + 2\mathfrak{P}_{m+3} + 3\mathfrak{P}_{m+4} + \ldots)]$$

$$= r.1,0p^m [\Sigma\mathfrak{P}_{m+1} + d(\mathfrak{P}_{m+2} + 2\mathfrak{P}_{m+3} + \ldots)].$$

Dividirt man nun diesen Ausdruck durch $P_m$, so erhält man den verlangten Baarwerth.

26) Baarwerth $= r[\varrho_m - d(\mathfrak{P}_{m+2} + 2\mathfrak{P}_{m+3} + 3\mathfrak{P}_{m+4} + \ldots)]$.
Andeutung. Setze d negativ.

27) Baarwerth $= \frac{r}{\mathfrak{P}_m}(\mathfrak{P}_{m+1} + q\,\mathfrak{P}_{m+2} + q^2\mathfrak{P}_{m+3} + \ldots)$.

Andeutung. Baarwerth der Ausgaben der Bank

$$= \frac{r\,P_{m+1}}{1,0p} + \frac{rq.P_{m+2}}{1,0p^2} + \frac{rq^2.P_{m+2}}{1,0p^3} + \ldots$$

$$= r.1,0p^m(\mathfrak{P}_{m+1} + q\mathfrak{P}_{m+2} + q^2\mathfrak{P}_{m+3} + \ldots)$$ u. s. w.

## §. 83.

1) Baare Einlage = 2254,3524 Mk.
Andeutung. Nach §. 68.
2) Kapital = 6000 Mk.
Andeutung. Nach §. 68.
3) Prämie = 343,497 Mk.
Andeutung. Nach §. 69.
4) Kapital = 1000 Mk.
Andeutung. Nach §. 69.
5) Baare Einlage = 4551,208 Mk.
Andeutung. Nach §. 70.
6) Kapital = 42692,47 Mk.
Andeutung. Nach §. 70.
7) Prämie = 406,318 Mk.
Andeutung. Nach §. 71.
8) Baarwerth = 3214, 328 Mk.
Andeutung. Nach §. 72.
9) Kapital = 12309 Mk.
Andeutung. Nach §. 72.
10) Prämie = 442,62 Mk.
Andeutung. Nach §. 73.
11) Kapital = 4597 Mk.
Andeutung. Nach §. 73.
12) Baarwerth = 4525,0093 Mk.
Andeutung. Nach §. 74.
13) Kapital = 6000 Mk.
Andeutung. Nach §. 74.
14) Prämie = 1387,356 Mk.
Andeutung. Nach §. 75.
15) Kapital = 10000 Mk.
Andeutung. Nach §. 75.
16) Baarwerth = 7655,69 Mk.
Andeutung. Nach §. 76.
17) Kapital = 4000 Mk.
Andeutung. Nach §. 76.
18) $\alpha$) 2347,216 Mk.
$\beta$) 951,1592 Mk.
Andeutung. Nach §. 77.
19) Kapital = 1000 Mk.
Andeutung. Nach §. 77.

20) Kapital = 1000 Mk.
Andeutung. Nach §. 77.
21) Baarwerth = 2220,896 Mk.
Andeutung. Nach §. 78.
22) Kapital = 7357,9 Mk.
Andeutung. Nach §. 78.
23) Baarwerth = 5542,1606 Mk.
Andeutung. Nach §. 79.
24) Baarwerth = 9515,6534 Mk.
Andeutung. Nach §. 80.
25) Baare Einlage = 3896,058 Mk.
Andeutung. Nach §. 81.

---

# Fünfter Abschnitt.

## Von den höheren Gleichungen.

### §. 87.

1) $f_1(x) = 3x^2 + 10x - 7$
$f_2(x) = 3x + 5$
$f_3(x) = 1.$
2) $f_1(x) = 3x^2 - 20x - 15$
$f_2(x) = 3x - 10$
$f_3(x) = 1.$
3) $f_1(x) = 4x^3 + 24x^2 + 30x + 17$
$f_2(x) = 6x^2 + 24x + 15$
$f_3(x) = 4x + 8$
$f_4(x) = 1.$
4) $f_1(x) = 4x^3 - 20x + 16$
$f_2(x) = 6x^2 - 10$
$f_3(x) = 4x$
$f_4(x) = 1.$
5) $f_1(x) = 5x^4 - 32x^3 + 36x^2 - 34x + 11$
$f_2(x) = 10x^3 - 48x^2 + 36x - 17$
$f_3(x) = 10x^2 - 32x + 12$
$f_4(x) = 5x - 8$
$f_5(x) = 1.$
6) $f_1(x) = 6x^5 + 60x^4 - 16x^3 + 9x^2 - 4x + 5$

$f_2(x) = 15x^4 + 120x^3 - 24x^2 + 9x - 2$
$f_3(x) = 20x^3 + 120x^2 - 16x + 3$
$f_4(x) = 15x^2 + 60x - 4$
$f_5(x) = 6x + 12$
$f_6(x) = 1.$

## §. 94.

1) Quotient $= x^2 - 3x - 13,$ Rest $= -55.$
2) „ $= x^3 - 5x + 2,$ „ $= 0.$
3) „ $= x^4 + 3x^2 - 2x - 5,$ „ $= 0.$
4) „ $= x^3 - 8x^2 + 5x - 4,$ „ $= 0.$
5) „ $= x^3 - x^2 - x - 5,$ „ $= -200.$
6) „ $= x^6 - 8x^3 + 2x^2 - 4,$ „ $= 100.$
7) „ $= x^5 + 4x^2 - 2,$ „ $= 0.$
8) „ $= 4x^4 - 3x^2 + 8x - 5,$ „ $= 40.$

## §. 96.

1) $x^3 - 9x^2 + 26x - 24 = 0.$
2) $x^3 - x^2 - 41x + 105 = 0.$
3) $x^3 + 2x^2 - 5x - 6 = 0.$
4) $x^3 + 9x^2 + 26x + 24 = 0.$
5) $x^4 - 13x^3 + 59x^2 - 107x + 60 = 0.$
6) $x^4 + 6x^3 + 3x^2 - 26x - 24 = 0.$
7) $x^5 + 2x^4 - 34x^3 - 68x^2 + 225x + 450 = 0.$
8) $x^4 - 8x^3 + 23x^2 - 28x + 12 = 0.$
9) $x^5 - 5x^4 + 40x^2 - 80x + 48 = 0.$

## §. 107.

1) 4 zweimal.
2) 1 zweimal.
3) 7 dreimal.
4) 2 zweimal und 5 zweimal.
5) 2 zweimal und 6 zweimal.
6) — 1 zweimal und 2 dreimal.

## §. 109.

1) $1, \frac{3}{4}, \frac{4}{3}.$

2) $-1, \frac{2}{5}, \frac{5}{2}$.

3) $4, \frac{1}{4}, 8, \frac{1}{8}$.

4) $2, \frac{1}{2}, 7, \frac{1}{7}$.

5) $1, 2, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{5}{3}$.

6) $-1, 2, \frac{1}{2}, -7, -\frac{1}{7}$.

7) $1, 1, 1, 1, \frac{5+\sqrt{21}}{2}, \frac{5-\sqrt{21}}{2}$.

8) $1, 1, 2, \frac{1}{2}, 3, \frac{1}{3}, -4, -\frac{1}{4}$.

## §. 112.

1) α) $y^4 - 4y^3 - 43y^2 - 26y + 72 = 0$.
β) $y^4 - 49y^2 - 120y = 0$.
γ) $y^4 + 12y^3 + 5y^2 - 306y - 720 = 0$.
δ) $y^4 + 20y^3 + 101y^2 - 110y - 1200 = 0$.

2) α) $y^6 + 14y^5 + 77y^4 + 216y^3 + 328y^2 + 256y + 80 = 0$.
β) $y^6 + 20y^5 + 162y^4 + 684y^3 + 1593y^2 + 1944y + 972 = 0$.
γ) $y^6 + 32y^5 + 422y^4 + 2940y^3 + 11425y^2 + 23500y + 20000 = 0$.

3) α) $y^5 - 13y^4 + 59y^3 - 107y^2 + 60y = 0$.
β) $y^5 - 23y^4 + 203y^3 - 853y^2 + 1692y - 1260 = 0$.
γ) $y^5 - 33y^4 + 427y^3 - 2703y^2 + 8356y - 10080 = 0$.

4) α) $4y^4 + 57y^3 + 287y^2 + 612y + 468 = 0$.
β) $4y^4 - 87y^3 + 692y^2 - 2367y + 2898 = 0$.

## §. 114.

1) α) $y^4 - 18y^3 + 116y^2 - 312y + 288 = 0$.
β) $y^4 - 27y^3 + 261y^2 - 1053y + 1458 = 0$.
γ) $y^4 - 45y^3 + 725y^2 - 4875y + 11250 = 0$.

2) α) $y^5 - \frac{2}{3}y^4 - \frac{2}{9}y^3 - \frac{8}{27}y^2 - \frac{7}{81}y - \frac{2}{243} = 0$.

β) $y^5 - y^4 - \frac{1}{2}y^3 - y^2 - \frac{7}{16}y - \frac{1}{16} = 0.$

γ) $y^5 - \frac{3}{2}y^4 - \frac{9}{8}y^3 - \frac{27}{8}y^2 - \frac{567}{256}y - \frac{243}{512} = 0.$

δ) $y^5 - 8y^4 - 32y^3 - 512y^2 - 1792y + 2048 = 0.$

## §. 116.

1) $y^3 - 3y^2 - 16y + 6 = 0;\ y = 2x.$
2) $y^4 + 5y^3 - 28y^2 + 384y - 20480 = 0;\ y = 8x.$
3) $y^5 + 2y^4 + 15y^2 + 21y - 972 = 0;\ y = 3x.$
4) $y^5 + 80y^3 + 1500y^2 - 7000y + 55000 = 0;\ y = 10x.$
5) $y^5 + y^4 + 12y^3 + 12y^2 + 108y + 23328 = 0;$
$y = 6x.$

## §. 118.

1) $y^3 - 56y + 164 = 0.$
2) $y^3 - 75y - 238 = 0.$
3) $y^4 - 230y^2 + 1904y - 4442 = 0.$
4) $y^4 - \frac{3}{2}y^2 + 5y + \frac{205}{16} = 0.$
5) $y^5 - \frac{18}{5}y^3 - \frac{17}{25}y^2 + \frac{507}{125}y - \frac{17153}{3125} = 0.$
6) $y^6 - 60y^4 - 305y^3 - 630y^2 - 594y - 208 = 0.$
7) $y^6 - \frac{125}{12}y^4 + \frac{625}{27}y^3 - \frac{3125}{144}y^2 + \frac{2801}{324}y +$
$\frac{100723}{46656} = 0.$

## §. 121.

1) 4, 6, — 4.
2) 3, — 2, — 5.
3) 2, — 5.
Die beiden anderen Wurzeln sind $-2 \pm 2\sqrt{-3}$.
4) 4, 6.
Die beiden anderen Wurzeln sind $1 \pm \sqrt{-3}$.
5) 3, 5, — 3, — 9, — 11.
Andeutung. Bestimme zuerst die Grenzen der positiven und negativen Wurzeln, um sogleich die überflüssigen Faktoren auszuschließen.
6) 1, 2, 3, 13, — 1, — 2.

7) 4, 6, — 10.

Die anderen Wurzeln sind $1 \pm \sqrt{-3}$.

8) $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$, $-\frac{2}{3}$.

Andeutung. Verwandle nach §. 115 die Gleichung in eine andere, deren Coefficienten ganze Zahlen sind. Die Wurzeln dieser Gleichung sind alsdann 12, 18, — 16 und da $y = 24x$, so findet man für x obige Werthe.

9) $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{5}$, $2\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{2}$.

10) $\frac{1}{4}$, $-\frac{2}{3}$.

Die beiden anderen Wurzeln sind $1 \pm \sqrt{-5}$.

## §. 125.

1) Eine positive zwischen 3 und 4, zwei negative zwischen 0 und — 1, — 3 und — 4.
2) Zwei negative zwischen 0 und — 1, — 1 und — 2.
3) Eine positive zwischen 7 und 8; eine negative zwischen — 1 und — 2.
4) Zwei positive zwischen 0 und 1, 8 und 9.
5) Eine positive zwischen 1 und 2, eine negative zwischen — 6 und — 7.
6) Keine.
7) Zwei positive zwischen 0 und 1, zwei negative zwischen 0 und — 1, — 4 und — 5.

Anmerkung. Eine weitere Trennung nach der am Schlusse des §. 124 gemachten Bemerkung lehrt, daß die eine der positiven Wurzeln zwischen 0,4 und 0,5, die andere zwischen 0,8 und 0,9 liegt.

## §. 131.

1) $x_1 = 0{,}447525$; $x_2 = 1{,}6090937$; $x_3 = 6{,}9433809$.
2) $x_1 = -2{,}106364$; $x_2 = 1{,}1436712$; $x_3 = 9{,}962692$.
3) $x_1 = -2$; $x_2 = -0{,}191282$.
4) $x_1 = 1$; $x_2 = -5{,}227871$.
5) $x_1 = -1{,}605483$; $x_2 = -0{,}152381$.
6) $x_1 = 0{,}411946$; $x_2 = 8{,}017498$.
7) $x_1 = 1{,}240387$; $x_2 = -6{,}359759$.
8) $x_1 = -1$; $x_2 = -0{,}53209$; $x_3 = 0{,}652704$; $x_4 = 2{,}879384$.

9) $x_1 = -4{,}551933$; $x_2 = -0{,}668669$; $x_3 = 0{,}400722$; $x_4 = 0{,}81988$.

10) $x_1 = -1{,}459725$; $x_2 = 1{,}663839$.

11) $x_1 = -1{,}1414967$; $x_2 = -0{,}0936043$.

12) $x_1 = -0{,}622171$; $x_2 = 0{,}156917$.

13) $x_1 = -0{,}3800639$; $x_2 = 0{,}2614849$; $x_3 = 1{,}526355$; $x_4 = 6{,}592223$.

14) $x_1 = -0{,}106470$; $x_2 = 8{,}732192$.

15) $x_1 = -7{,}940675$; $x_2 = 1{,}202799$.

16) $x_1 = 0{,}4730588$; $x_2 = 2{,}6796698$.

17) $x_1 = -9{,}96985$; $x_2 = 1{,}0899489$.

18) $x_1 = -5{,}914657$; $x_2 = 1{,}1392796$.

19) $x_1 = 0{,}443323$; $x_2 = 3{,}857757$.

Andeutung. $x_1 = \frac{1}{y_1}: y_1^4 - 2y_1^3 + y_1^2 - 4y_1 + 1 = 0$;

$y_1 = 2 + \frac{1}{y_2}: 3y_2^4 - 8y_2^3 - 13y_2^2 - 6y_2 - 1 = 0$;

$y_2 = 3 + \frac{1}{y_3}: 109y_3^4 - 24y_3^3 - 77y_3^2 - 28y_3 - 3 = 0$;

$y_3 = 1 + \frac{1}{y_4}: 23y_4^4 - 182y_4^3 - 505y_4^2 - 412y_4 - 109 = 0$;

$y_4 = 10 + \frac{1}{y_5}: 6729y_5^4 - 26888y_5^3 - 7835y_5^2 - 738y_5 - 23 = 0$;

$y_5 = 4 + \frac{1}{y_6}$.

$x_2 = 3 + \frac{1}{y_1}: 23y_1^4 - 4y_1^3 - 19y_1^2 - 8y_1 - 1 = 0$;

$y_1 = 1 + \frac{1}{y_2}: 9y_2^4 - 34y_2^3 - 107y_2^2 - 88y_2 - 23 = 0$;

$y_2 = 6 + \frac{1}{y_3}: 83y_3^4 - 2732y_3^3 - 1225y_3^2 - 182y_3 - 9 = 0$;

$y_3 = 33 + \frac{1}{y_4}$.

20) $x_1 = 0{,}443938$; $x_2 = 0{,}769056$; $x_3 = 8{,}787007$.

Andeutung. $x_1 = \frac{1}{y_1}: 3y_1^3 - 11y_1^2 + 10y_1 - 1 = 0$;

$y_1 = 2 + \frac{1}{y_2}: y_2^3 - 2y_2^2 - 7y_2 - 3 = 0$;

$y_2 = 3 + \frac{1}{y_3}: 15y_3^3 - 8y_3^2 - 7y_3 - 1 = 0$;

$y_3 = 1 + \frac{1}{y_4}: y_4^3 - 22y_4^2 - 37y_4 - 15 = 0$;

$y_4 = 23 + \frac{1}{y_5}: 337y_5^3 - 538y_5^2 - 47y_5 - 1 = 0$;

$y_5 = 1 + \frac{1}{y_6}$: $249y_6^3 + 112y_6^2 - 473y_6 - 337 = 0$;

$y_6 = 1 + \frac{1}{y_7}$: $449y_7^3 - 498y_7^2 - 859y_7 - 249 = 0$;

$y_7 = 2 + \frac{1}{y_8}$: $367y_8^3 - 2537y_8^2 - 2196y_8 - 449 = 0$;

$y_8 = 7 + \frac{1}{y_9}$.

$x_2 = \frac{1}{y_1}$: $3y_1^3 - 11y_1^2 + 10y_1 - 1 = 0$;

$y_1 = 1 + \frac{1}{y_2}$: $y_2^3 - 3y_2^2 - 2y_2 + 3 = 0$;

$y_2 = 3 + \frac{1}{y_3}$: $3y_3^3 - 7y_3^2 - 6y_3 - 1 = 0$;

$y_3 = 3 + \frac{1}{y_4}$: $y_4^3 - 33y_4^2 - 20y_4 - 3 = 0$;

$y_4 = 33 + \frac{1}{y_5}$: $660y_5^3 - 1069y_5^2 - 66y_5 - 1 = 0$;

$y_5 = 1 + \frac{1}{y_6}$: $476y_6^3 + 224y_6^2 - 911y_6 - 660 = 0$;

$y_6 = 1 + \frac{1}{y_7}$: $871y_7^3 - 965y_7^2 - 1652y_7 - 476 = 0$;

$y_7 = 2 + \frac{1}{y_8}$.

$x_3 = 8 + \frac{1}{y_1}$: $43y_1^3 - 43y_1^2 - 14y_1 - 1 = 0$;

$y_1 = 1 + \frac{1}{y_2}$: $15y_2^3 - 29y_2^2 - 86y_2 - 43 = 0$;

$y_2 = 3 + \frac{1}{y_3}$: $157y_3^3 - 145y_3^2 - 106y_3 - 15 = 0$;

$y_3 = 1 + \frac{1}{y_4}$: $109y_4^3 - 75y_4^2 - 326y_4 - 157 = 0$;

$y_4 = 2 + \frac{1}{y_5}$: $237y_5^3 - 682y_5^2 - 579y_5 - 109 = 0$;

$y_5 = 3 + \frac{1}{y_6}$: $1585y_6^3 - 1728y_6^2 - 1451y_6 - 237 = 0$;

$y_6 = 1 + \frac{1}{y_7}$: $1831y_7^3 + 152y_7^2 - 3027y_7 - 1585 = 0$;

$y_7 = 1 + \frac{1}{y_8}$: $2629y_8^3 - 2770y_8^2 - 5645y_8 - 1831 = 0$;

$y_8 = 2 + \frac{1}{y_9}$: $3169y_9^3 - 14823y_9^2 - 13004y_9 - 2629 = 0$;

$y_9 = 5 + \frac{1}{y_{10}}$.

21) $x_1 = 0{,}343637$; $x_2 = 0{,}813219$; $x_3 = -7{,}156857$.

Andeutung. $x_1 = \frac{1}{y_1}$: $2y_1^3 - 8y_1^2 + 6y_1 + 1 = 0$;

$y_1 = 2 + \frac{1}{y_2}$: $3y_2^3 + 2y_2^2 - 4y_2 - 2 = 0$;

$$y_2 = 1 + \frac{1}{y_3} : y_3^3 - 9y_3^2 - 11y_3 - 3 = 0;$$
$$y_3 = 10 + \frac{1}{y_4} : 13y_4^3 - 109y_4^2 - 21y_4 - 1 = 0;$$
$$y_4 = 8 + \frac{1}{y_5} : 489y_5^3 - 731x_5^2 - 203y_5 - 13 = 0:$$
$$y_5 = 1 + \frac{1}{y_6} : 458y_6^3 + 198y_6^2 - 736y_6 - 489 = 0;$$
$$y_6 = 1 + \frac{1}{y_7} : 569y_7^3 - 1034y_7^2 - 1572y_7 - 458 = 0;$$
$$y_7 = 2 + \frac{1}{y_8}.$$
$$x_2 = \frac{1}{y_1} : 2y_1^3 - 8y_1^2 + 6y_1 + 1 = 0;$$
$$y_1 = 1 + \frac{1}{y_2} : y_2^3 - 4y_2^2 - 2y_2 + 2 = 0;$$
$$y_2 = 4 + \frac{1}{y_3} : 6y_3^3 - 14y_3^2 - 8y_3 - 1 = 0;$$
$$y_3 = 2 + \frac{1}{y_4} : 25y_4^3 - 8y_4^2 - 22y_4 - 6 = 0;$$
$$y_4 = 1 + \frac{1}{y_5} : 11y_5^3 - 37y_5^2 - 67y_5 - 25 = 0;$$
$$y_5 = 4 + \frac{1}{y_6} : 181y_6^3 - 165y_6^2 - 95y_6 - 11 = 0;$$
$$y_6 = 1 + \frac{1}{y_7} : 90y_7^3 - 118y_7^2 - 378y_7 - 181 = 0;$$
$$y_7 = 2 + \frac{1}{y_8} : 689y_8^3 - 230y_8^2 - 422y_8 - 90 = 0;$$
$$y_8 = 1 + \frac{1}{y_9} : 53y_9^3 - 1185y_9^2 - 1837y_9 - 689 = 0;$$
$$y_9 = 30 + \frac{1}{y_{10}}.$$

Um $x_3$ zu bestimmen, verwandle zuerst die Gleichung in eine andere mit entgegengesetzten Wurzeln. Man findet dafür:

$$x^3 - 6x^2 - 8x - 2 = 0$$

und nun folgt:

$$x_3 = 7 + \frac{1}{y_1} : 9y_1^3 - 55y_1^2 - 15y - 1 = 0;$$
$$y_1 = 6 + \frac{1}{y_2} : 127y_2^3 - 297y_2^2 - 107y_2 - 9 = 0;$$
$$y_2 = 2 + \frac{1}{y_3} : 395y_3^3 - 229y_3^2 - 465y_3 - 127 = 0;$$
$$y_3 = 1 + \frac{1}{y_4} : 426y_4^3 - 262y_4^2 - 956y_4 - 395 = 0;$$
$$y_4 = 1 + \frac{1}{y_5} : 1187y_5^3 - 202y_5^2 - 1016y_5 - 426 = 0;$$
$$y_5 = 1 + \frac{1}{y_6} : 53y_6^3 - 2141y_6^2 - 3763y_6 - 1187 = 0;$$
$$y_6 = 42 + \frac{1}{y_7} \text{ u. s. w.}$$

22) $x_1 = -0{,}513661$; $x_2 = 0{,}383885$.
23) $x = 1{,}80219$.
24) $x = 2{,}851739$.
25) $x_1 = -0{,}29737$; $x_2 = 4{,}585787$; $x_3 = 7{,}414213$.
26) $x_1 = -0{,}064027$; $x_2 = -1{,}4206924$; $x_3 = 1{,}805943$.
27) $x_1 = 0{,}81986$; $x_2 = 3{,}48887$; $x_3 = 3{,}763932$; $x_4 = 7{,}69127$; $x_5 = 8{,}236068$.
28) $x_1 = -5{,}414213$; $x_2 = -2{,}585787$; $x_3 = 6{,}26795$; $x_4 = 9{,}73205$.
29) $x_1 = -8{,}24264$; $x_2 = -1{,}645751$; $x_3 = -1{,}464101$; $x_4 = 0{,}24264$; $x_5 = 3{,}645751$; $x_6 = 5{,}464101$.
30) $x_1 = -7{,}645751$; $x_2 = -6{,}44949$; $x_3 = -2{,}354249$; $x_4 = -1{,}55051$; $x_5 = 0{,}763932$; $x_6 = 5{,}236068$.
31) $x_1 = 0{,}181495$; $x_2 = 5{,}5097719$.

Anmerkung. Behandelt man die Gleichung als reciproke und setzt $x + \frac{1}{x} = y$, so folgt: $y^3 - 6y^2 + 10 = 0$ und hieraus: $y_1 = -1{,}18014$; $y_2 = 1{,}488872$; $y_3 = 5{,}691268$.

32) $x_1 = 1{,}460179$; $x_2 = 5{,}528336$.
33) $x_1 = -2{,}797348$; $x_2 = -0{,}8610344$; $x_3 = 0{,}658382$; $x_4 = 1{,}044683$.
34) $x_1 = -0{,}0383726$; $x_2 = 0{,}4691192$.
35) $x_1 = -3{,}86013$; $x_2 = -3{,}585027$; $x_3 = -0{,}701582$; $x_4 = 1{,}28661$.

---

# Sechster Abschnitt.

## Einleitung zur Lehre von den Determinanten.

### §. 147.

1) a) $\mathfrak{a}_3\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{a}_3\mathfrak{a}_2$, $\mathfrak{a}_5\mathfrak{a}_2$, $\mathfrak{a}_5\mathfrak{a}_4$, $\mathfrak{a}_6\mathfrak{a}_4$;
b) $\mathfrak{a}_3\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{a}_3\mathfrak{a}_2$, $\mathfrak{a}_4\mathfrak{a}_2$, $\mathfrak{a}_6\mathfrak{a}_5$;
c) $\mathfrak{a}_4\mathfrak{a}_2$, $\mathfrak{a}_4\mathfrak{a}_3$, $\mathfrak{a}_4\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{a}_3\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{a}_6\mathfrak{a}_5$;
d) $\mathfrak{a}_4\mathfrak{a}_3$, $\mathfrak{a}_4\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{a}_4\mathfrak{a}_2$, $\mathfrak{a}_6\mathfrak{a}_3$, $\mathfrak{a}_6\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{a}_6\mathfrak{a}_2$, $\mathfrak{a}_6\mathfrak{a}_5$, $\mathfrak{a}_3\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{a}_3\mathfrak{a}_2$.

2) a) 7. b) 13.

3) $\alpha$) $a_{1,1}\,a_{2,2}\,a_{3,3}\,a_{4,4} - a_{1,1}\,a_{2,2}\,a_{4,3}\,a_{3,4} + a_{1,1}\,a_{3,2}\,a_{4,3}\,a_{2,4}$
$- a_{1,1}\,a_{3,2}\,a_{2,3}\,a_{4,4} + a_{1,1}\,a_{4,2}\,a_{2,3}\,a_{3,4} - a_{1,1}\,a_{4,2}\,a_{3,3}\,a_{2,4}$
$+ a_{2,1}\,a_{4,2}\,a_{3,3}\,a_{1,4} - a_{2,1}\,a_{4,2}\,a_{1,3}\,a_{3,4} + a_{2,1}\,a_{3,2}\,a_{1,3}\,a_{4,4}$
$- a_{2,1}\,a_{3,2}\,a_{4,3}\,a_{1,4} + a_{2,1}\,a_{1,2}\,a_{4,3}\,a_{3,4} - a_{2,1}\,a_{1,2}\,a_{3,3}\,a_{4,4}$
$+ a_{3,1}\,a_{1,2}\,a_{2,3}\,a_{4,4} - a_{3,1}\,a_{1,2}\,a_{4,3}\,a_{2,4} + a_{3,1}\,a_{2,2}\,a_{4,3}\,a_{1,4}$
$- a_{3,1}\,a_{2,2}\,a_{1,3}\,a_{4,4} + a_{3,1}\,a_{4,2}\,a_{1,3}\,a_{2,4} - a_{3,1}\,a_{4,2}\,a_{2,3}\,a_{1,4}$
$+ a_{4,1}\,a_{3,2}\,a_{2,3}\,a_{1,4} - a_{4,1}\,a_{3,2}\,a_{1,3}\,a_{2,4} + a_{4,1}\,a_{2,2}\,a_{1,3}\,a_{3,4}$
$- a_{4,1}\,a_{2,2}\,a_{3,3}\,a_{1,4} + a_{4,1}\,a_{1,2}\,a_{3,3}\,a_{2,4} - a_{4,1}\,a_{1,2}\,a_{2,3}\,a_{3,4}$

$\beta$) $a_{1,1}\,a_{2,2}\,a_{3,3}\,a_{4,4} - a_{1,1}\,a_{2,2}\,a_{3,4}\,a_{4,3} + a_{1,1}\,a_{2,3}\,a_{3,4}\,a_{4,2}$
$- a_{1,1}\,a_{2,3}\,a_{3,2}\,a_{4,4} + a_{1,1}\,a_{2,4}\,a_{3,2}\,a_{4,3} - a_{1,1}\,a_{2,4}\,a_{3,3}\,a_{4,2}$
$+ a_{1,2}\,a_{2,4}\,a_{3,3}\,a_{4,1} - a_{1,2}\,a_{2,4}\,a_{3,1}\,a_{4,3} + a_{1,2}\,a_{2,3}\,a_{3,1}\,a_{4,4}$
$- a_{1,2}\,a_{2,3}\,a_{3,4}\,a_{4,1} + a_{1,2}\,a_{2,1}\,a_{3,4}\,a_{4,3} - a_{1,2}\,a_{2,1}\,a_{3,3}\,a_{4,4}$
$+ a_{1,3}\,a_{2,1}\,a_{3,2}\,a_{4,4} - a_{1,3}\,a_{2,1}\,a_{3,4}\,a_{4,2} + a_{1,3}\,a_{2,2}\,a_{3,4}\,a_{4,1}$
$- a_{1,3}\,a_{2,2}\,a_{3,1}\,a_{4,4} + a_{1,3}\,a_{2,4}\,a_{3,1}\,a_{4,2} - a_{1,3}\,a_{2,4}\,a_{3,2}\,a_{4,1}$
$+ a_{1,4}\,a_{2,3}\,a_{3,2}\,a_{4,1} - a_{1,4}\,a_{2,3}\,a_{3,1}\,a_{4,2} + a_{1,4}\,a_{2,2}\,a_{3,1}\,a_{4,3}$
$- a_{1,4}\,a_{2,2}\,a_{3,3}\,a_{4,1} + a_{1,4}\,a_{2,1}\,a_{3,3}\,a_{4,2} - a_{1,4}\,a_{2,1}\,a_{3,2}\,a_{4,3}$

4) $a_1\,b_2\,c_3\,d_4 - a_1\,b_2\,c_4\,d_3 + a_1\,b_3\,c_4\,d_2$
$- a_1\,b_3\,c_2\,d_4 + a_1\,b_4\,c_2\,d_3 - a_1\,b_4\,c_3\,d_2$
$+ a_2\,b_1\,c_3\,d_4 - a_2\,b_1\,c_4\,d_3 + a_2\,b_3\,c_1\,d_4$
$- a_2\,b_3\,c_4\,d_1 + a_2\,b_4\,c_1\,d_3 - a_2\,b_4\,c_3\,d_1$
$+ a_3\,b_1\,c_2\,d_4 - a_3\,b_1\,c_4\,d_2 + a_3\,b_2\,c_1\,d_4$
$- a_3\,b_2\,c_4\,d_1 + a_3\,b_4\,c_1\,d_2 - a_3\,b_4\,c_2\,d_1$
$+ a_4\,b_1\,c_2\,d_3 - a_4\,b_1\,c_3\,d_2 + a_4\,b_2\,c_1\,d_3$
$- a_4\,b_2\,c_3\,d_1 + a_4\,b_3\,c_1\,d_2 - a_4\,b_3\,c_2\,d_1.$

5) Bleiben die Horizontalzeiger unverändert, so entsteht 3, 4, 2, 1 aus 1, 2, 3, 4 durch dreimalige Vertauschung von je 2 Indices (3 mit 1, dann 4 mit 2 und endlich 1 mit 2). Ordnet man die vorgelegte Permutationsform nach den Vertikalzeigern, so muß man, um 4, 3, 1, 2 aus 1, 2, 3, 4 zu erhalten, wiederum dreimal je 2 Indices verwechseln (4 mit 1, dann 3 mit 2 und 1 mit 2). Nach §. 135 Zus. 3. ist somit in beiden Fällen die gegebene Permutationsform negativ.

6) Verfahre analog wie bei 5.

7) Entwickle nach §. 136. Vergl. bei $\alpha$) — $\gamma$) auch §. 137 und bei $\delta$) und $\varepsilon$) §. 138.

8. Vergl. auch §. 139.

9) α) $a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}$ β) $c_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}$

γ) $- c_2 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_3 & b_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & d_4 \end{vmatrix}$ δ) $- b_3 \begin{vmatrix} a_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & c_2 & d_2 \\ a_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix}$

ε) $b_4 \begin{vmatrix} a_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & c_3 & d_3 \end{vmatrix}$ ζ) $d_2 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_3 & b_3 & c_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 \end{vmatrix}$

Andeutung. Vergl. §. 140.

10) $$a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 & d_2 \\ b_3 & c_3 & d_3 \\ b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 & d_1 \\ b_3 & c_3 & d_3 \\ b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 & d_1 \\ b_2 & c_2 & d_2 \\ b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} - a_4 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 & d_1 \\ b_2 & c_2 & d_2 \\ b_3 & c_3 & d_3 \end{vmatrix}$$

$$= - b_1 \begin{vmatrix} a_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} + b_2 \begin{vmatrix} a_1 & c_1 & d_1 \\ a_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} - b_3 \begin{vmatrix} a_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & c_2 & d_2 \\ a_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} + b_4 \begin{vmatrix} a_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & c_3 & d_3 \end{vmatrix}$$

$$= c_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & d_4 \end{vmatrix} - c_2 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_3 & b_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & d_4 \end{vmatrix} + c_3 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_4 & b_4 & d_4 \end{vmatrix} - c_4 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}$$

$$= - d_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 \end{vmatrix} + d_2 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_3 & b_3 & c_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 \end{vmatrix} - d_3 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_4 & b_4 & c_4 \end{vmatrix} + d_4 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$= a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 & d_2 \\ b_3 & c_3 & d_3 \\ b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} - b_1 \begin{vmatrix} a_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} + c_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & d_4 \end{vmatrix} - d_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 \end{vmatrix}$$

$$= - a_2 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 & d_1 \\ b_3 & c_3 & d_3 \\ b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} + b_2 \begin{vmatrix} a_1 & c_1 & d_1 \\ a_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} - c_2 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_3 & b_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & d_4 \end{vmatrix} + d_2 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_3 & b_3 & c_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 \end{vmatrix}$$

$$= a_3 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 & d_1 \\ b_2 & c_2 & d_2 \\ b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} - b_3 \begin{vmatrix} a_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & c_2 & d_2 \\ a_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} + c_3 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_4 & b_4 & d_4 \end{vmatrix} - d_3 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_4 & b_4 & c_4 \end{vmatrix}$$

$$= - a_4 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 & d_1 \\ b_2 & c_2 & d_2 \\ b_3 & c_3 & d_3 \end{vmatrix} + b_4 \begin{vmatrix} a_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & c_3 & d_3 \end{vmatrix} - c_4 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix} + d_4 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

Andeutung. Vergl. §. 142.

11) 1) $z^3 - 3abz + ab\,(a + b)$.

2) $z^4 - 6abz^2 + 4ab\,(a + b)\,z - ab\,(a^2 + ab + b^2)$.

3) $(z - a)^2$.

4) $2b_1\ c_1\ c_2$.

5) Null.

6) $(b_1\ d_3 - c_1\ d_2 + d_1\ c_2)^2$.

7) $z^5 - 10abz^3 + 10ab\,(a + b)\,z^2 - 5ab\,(a^2 + ab + b^2)\,z + ab\,(a^3 + a^2b + ab^2 + b^3)$.

Andeutung. Setze statt der 1., 2., 3. und 4. Horizontalreihe, die (1. — 2.), (2. — 3.), (3. — 4.), (4. — 5.) und entwickle die erhaltene Determinante nach den Coefficienten der ersten Vertikalreihe. Jede der zwei resultirenden Determinanten vierter Ordnung entwickle nun nach den Coefficienten der ersten Horizontalreihe u. s. w.

8) $ab\,(a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4)$.

Andeutung. Setze $a \begin{vmatrix} 0 & 1 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b & b & \dots & 0 \end{vmatrix} = ab \begin{vmatrix} 0 & 1 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & b & \dots & 0 \end{vmatrix}$ u. s. w.

9) $z^4 - (a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + f^2 + g^2)\,z^2 + (ag - bf - cd)^2$.

10) $- acdfz^3 + (a^2f^2 + b^2e^2 + c^2d^2 - 2abef - 2bcde)\,z^2 - acdfz$.

Andeutung. Entwickle zuerst nach den Coefficienten der ersten Horizontalreihe und darauf nach den Coefficenten der ersten Vertikalreihe.

11) $(a - b)\,(b - c)\,(c - a) = ab^2 - a^2b + bc^2 - b^2c + a^2c - ac^2$.

Andeutung. Subtrahire die zweite Horizontalreihe von der ersten und die dritte von der zweiten. Darnach dividire die erste Vertikalreihe durch $(a - b)$ und die zweite durch $(b - c)$.

Oder: Entwickle zuerst nach den Coefficienten der ersten Vertikalreihe, dann setze der Reihe nach bc, ac, ab als Faktor heraus.

12) $(b - a)\,(c - a)\,(d - a)\,(c - b)\,(d - b)\,(d - c)$.

Andeutung. Vergl. die Andeutung zu 11.

13) $(\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1)\,(\alpha_1\beta_3 - \alpha_3\beta_1)\,(\alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2)$.

Andeutung. Setze $\alpha_1^2\ \alpha_2^2\ \alpha_3^2$ als Faktor heraus und verfahre alsdann nach 10.

14) $a^4 - b^4$.

15) $a^5 - b^5$.

16) $(a - 1)^3\,(a + 3)$.

Andeutung. 2. V. — 1. V. und $(a - 1)$ als Faktor heraus; darnach 2. V. — 3. V. und wieder $(a - 1)$ als Faktor voran; dann 3. V. — 4. V. und nochmals $(a - 1)$ vor; darauf 1. V. — 4. V. und entwickle nach den Coefficienten der 1. H. u. s. w.

17) $(a - 1)^4 (a + 4)$.

Andeutung. Verfahre analog wie bei 16.

18) $(1 - a^3)^2$.

Andeutung. Addire die 2. und 3. V. zur 1. V. und setze $(1 + a + a^2)$ als Faktor heraus; subtrahire dann die 3. V. von der 2. V. und setze noch $(a - 1)$ vor; subtrahire nun die 3. V. von der 1. V. und setze wiederum $(a - 1)$ voran u. s. w.

19) $(1 - a^4)^2$.

Andeutung. Verfahre analog wie bei 18.

20) 6.

21) 190.

22) 373.

23) 392.

24) — 20.

25) 1184.

26) 1.

12) Andeutung. Subtrahire die mit c multiplicirte 1. V. von der 4. V., dann die mit b multiplicirte 1. V. von der 3. V., dann die mit a multiplicirte 1. V. von der 2. V.

13) 1) $x = 6;\ y = 5$.

2) $x = 8;\ y = 2$.

3) $x = 5;\ y = 2;\ z = 4$.

4) $x = 7;\ y = 5;\ z = 2$.

5) $x = 6;\ y = 11;\ z = 4$.

6) $x = 4;\ y = 2;\ z = 5$.

7) $x = 2;\ y = 9;\ z = 8;\ u = 3$.

8) $x = 6;\ y = 7;\ z = 4;\ u = 1$.

9) $x = -864;\ y = 830;\ z = -240;\ u = 22$.

10) $x = 1;\ y = 1;\ z = 2;\ u = -3$.

## Verbesserungen zum Lehrbuche.

S. 87. Z. 18 v. o. setze gezogen werde statt selbst sich befindet.
" 271. Z. 4 v. u. " halben Jahres " Jahres.

In der C. F. Winter'schen Verlagshandlung in Leipzig und Heidelberg ist ferner erschienen:

**Blum**, Dr. **Ludwig**, Professor an der Königl. Realanstalt in Stuttgart, Lehrbuch der Physik und Mechanik für gewerbliche Fortbildungsschulen. Im Auftrage der königlichen Commission für gewerbliche Fortbildungsschulen in Württemberg ausgearbeitet. Zweite, vermehrte Auflage. 8. geh. Preis 1 Thlr. 15 Ngr.

Dieses im Auftrage der Commission für gewerbliche Fortbildungsschulen in Württemberg ausgearbeitete Werk ist zunächst für die Lehrer und Schüler dieser Schulen und dann noch für alle Gewerbtreibende bestimmt, welche durch Selbststudium sich die nöthigen Kenntnisse von Physik und Mechanik erwerben müssen. Die Behandlung des Stoffes und die Darstellung ist daher ganz populär und so faßlich, daß Jeder sich in dem Buche Rathes erholen kann. Außerdem ist das Verständniß durch eine große Zahl guter Zeichnungen erleichtert. Der Stoff ist in der Weise vertheilt, daß jedem Abschnitte der Physik der dazu gehörige Theil der Mechanik gleich nachfolgt und beide so harmonisch in ein Ganzes verwachsen sind. Bei der hohen Bedeutung, welche Physik und Mechanik für die Gewerbe haben, wird dieses Werk den Gewerbtreibenden aller Art von großem Nutzen sein.

——— **Grundriß der Physik und Mechanik für gewerbliche Fortbildungsschulen.** Im Auftrage der königlichen Commission für gewerbliche Fortbildungsschulen in Württemberg ausgearbeitet. Dritte vermehrte und verbesserte Auflage. 8. geh. Preis 16 Ngr.

Der Plan und die Ausführung dieses Grundrisses der Physik und Mechanik ist zweckmäßig und wohlgeeignet dazu, den Schülern an gewerblichen Fortbildungsschulen Geschmack zu erwecken an dem vorliegenden Gegenstande. Man findet in dem Buche Belehrung über Hebel, Flaschenzug, Uhren, Lampen, Pumpen, Spritzen, Mühlwerke, Dampfmaschinen, Telegraphen und die optischen Instrumente. Zur Veranschaulichung sind saubere Zeichnungen beigefügt, welche ein klares Bild der im Buche besprochenen physikalischen und mechanischen Apparate geben.

**Blum, J. Reinhard,** Professor in Heidelberg, **Die Mineralien nach** den Krystallsystemen geordnet. Ein Leitfaden zum Bestimmen derselben vermittelst ihrer krystallographischen Eigenschaften. gr. 8. geh. Preis 10 Ngr.

**Leonhard,** Prof. Dr. **Gustav, Grundzüge der Geognosie und Geologie.** Dritte vermehrte Auflage. Mit in den Text gedruckten Holzschnitten. gr. 8. geh. Erstes Heft. Preis 20 Ngr.

Dieses in vielen Anstalten eingeführte Buch erscheint hiermit in dritter verbesserter Auflage. Der Herr Verfasser hat sich die Aufgabe gestellt, dieselbe gleich den früheren Auflagen zu einem guten und brauchbaren Leitfaden zu gestalten und namentlich auf die „Petrographie“, welche so bedeutende Umgestaltungen erfahren hat, besondere Mühe verwandt.

Gedruckt bei E. Polz in Leipzig.






NA
BIBLIOTECA
B.
Mis